



# Homologie d'intersection et variétés homologiques

Jean-Paul Brasselet, Martintxo Saralegi-Aranguren

## ► To cite this version:

Jean-Paul Brasselet, Martintxo Saralegi-Aranguren. Homologie d'intersection et variétés homologiques. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1992, 314, pp.847-950. hal-00870096

**HAL Id: hal-00870096**

**<https://hal-univ-artois.archives-ouvertes.fr/hal-00870096>**

Submitted on 9 Oct 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# HOMOLOGIE D'INTERSECTION ET VARIÉTÉS HOMOLOGIQUES

Jean Paul Brasselet et Martin Saralegi<sup>1</sup>

December 17, 2009

En introduisant l'homologie d'intersection Goresky et MacPherson ont avancé la conjecture suivante. **Conjecture.** *Si  $A$  est une pseudovariété stratifiée normale pour laquelle les applications naturelles  $IH_*^{\bar{p}}(A) \rightarrow IH_*^{\bar{q}}(A)$ , pour  $\bar{p} \leq \bar{q}$ , sont des isomorphismes alors  $A$  est une variété homologique.* Cette conjecture s'est avérée fautive [4]. En considérant une famille plus large de perversités, les perversités amples (*loose perversities*), et en se restreignant à la famille des pseudovariétés stratifiées dont les strates possèdent un voisinage tubulaire trivial, King a démontré que cette conjecture est vérifiée. Le but de ce travail est d'élargir la catégorie des pseudovariétés pour lesquelles la conjecture est réalisée. Nous remplaçons la condition de trivialité géométrique de [4] par une condition plus faible de trivialité homologique: les voisinages tubulaires des strates n'ont pas de monodromie homologique. Celle-ci est plus naturelle vu le caractère homologique de la conjecture. La catégorie des pseudovariétés ici considérées contient les *untwisted normal pseudomanifolds* de [4], les espaces stratifiés de [6], l'espace des orbites d'une action d'un groupe de Lie compact, l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien singulier compact de [5], les pseudovariétés stratifiées normales où les strates sont simplement connexes, ... Le résultat principal de ce travail s'énonce **Théorème** *Soit  $A$  une pseudovariété stratifiée sans monodromie. Les applications naturelles  $IH_*^{\bar{p}}(A) \rightarrow IH_*^{\bar{q}}(A)$  sont des isomorphismes pour toute paire de perversités amples  $\bar{p} \leq \bar{q}$  si et seulement si  $A$  est une variété homologique.* Toutes les homologies qui apparaissent dans ce travail sont à coefficients dans un anneau commutatif unitaire  $R$ . Le deuxième auteur remercie l'hospitalité offerte par le Département de Mathématiques de l'Université de Illinois à Urbana-Champaign pendant la réalisation de ce travail.

## 1 Rappels sur l'homologie d'intersection.

Nous introduisons les principales notions sur l'homologie d'intersection, que nous utiliserons dans la suite (cf. [3], [4], [2]). **1.1.** Une **perversité ample**  $\bar{p}$  est une suite d'entiers  $(p_2, \dots, p_n)$  vérifiant  $0 \leq p_k \leq k - 2$  pour tout  $k$ . Deux perversités amples  $\bar{p} \leq \bar{q}$  sont  **$m$ -consécutives** si, pour tout  $i \neq m$ ,  $p_i = q_i$  et  $q_m = p_m + 1$ . **1.2.** Soit  $A$  une pseudovariété stratifiée de dimension  $n$ . On posera  $m(A)$  l'entier vérifiant  $A_{n-m(A)} \neq A_{n-m(A)-1} = \emptyset$ . Pour chaque perversité ample  $\bar{p}$  on posera  $IC_*^{\bar{p}}(A)$  le complexe des chaînes d'intersection (à support compact) à coefficients dans  $R$  et  $IH_*^{\bar{p}}(A)$  l'homologie d'intersection de  $A$ . Si  $\bar{q}$  est une autre perversité ample avec  $\bar{p} \leq \bar{q}$  on a l'inclusion naturelle  $IC_*^{\bar{p}}(A) \hookrightarrow IC_*^{\bar{q}}(A)$ . Suivant [4] nous poserons  $IC_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A) = IC_*^{\bar{q}}(A) / IC_*^{\bar{p}}(A)$  et  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A)$  l'homologie associée. L'application naturelle  $IH_*^{\bar{p}}(A) \rightarrow IH_*^{\bar{q}}(A)$  est un isomorphisme si et seulement si  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A) = 0$ . Remarquons que  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A)$  est 0 si  $p_i = q_i$  pour tout entier  $i$  avec  $A_{n-i} \neq A_{n-i-1}$ ; si  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  sont  $m(A)$ -consécutives, alors  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A) = IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(U)$  pour tout ouvert  $U$  contenant  $A_{n-m(A)}$ .

---

<sup>1</sup>Allocation de recherche du DGICYT-Espagne.

## 2 Pseudovariétés stratifiées sans monodromie

Les pseudovariétés stratifiées considérées dans ce travail sont caractérisées par trois propriétés: elles sont normales, chaque strate possède un voisinage tubulaire et la monodromie de ce voisinage est triviale. **2.1.** Soit  $S$  un strate (composante connexe de  $A_i - A_{i-1}$ ) de  $A$ . Un voisinage

$U_S \subset A$  de  $S$  est un **voisinage tubulaire** s'il existe une retraction  $\pi_S: U_S \rightarrow S$  qui est une fibration localement triviale de fibre le cône  $cL_S$  sur le link  $L_S$  de  $S$  et dont le groupe structural est le groupe  $Aut(L_S)$  des automorphismes de  $L_S$  (homéomorphismes préservant la stratification de  $L_S$ ). Un **ensemble stratifié** est la donnée d'une pseudovariété stratifiée  $A$  et d'une famille de voisinages tubulaires  $\{U_S / S \text{ strate de } A\}$  vérifiant certaines conditions de compatibilité (voir [7]). **2.2.** Considérons la filtration localement triviale de fibre  $IH_*^{\bar{p}}(cL_S)$  associée à

la fibration  $\pi_S$ . Posons  $\mu_S^{\bar{p}}: \pi_1 S \rightarrow Aut(IH_*^{\bar{p}}(cL_S))$  la **monodromie** du fibré associé, ici  $Aut$  désigne le groupe d'automorphismes. Remarquons que si le voisinage tubulaire est le produit  $S \times cL_S$  alors la monodromie est triviale (i.e., l'application constante); la réciproque est fausse. Une **pseudovariété stratifiée sans monodromie** est une pseudovariété stratifiée normale  $A$  munie d'une structure d'espace stratifié dont la monodromie  $\mu_S^{\bar{p}}$  des voisinages tubulaires est triviale, et ceci pour toute strate  $S$  de  $A$  et toute perversité ample  $\bar{p}$ . Remarquons que si  $A$  est une pseudovariété stratifiée sans monodromie et  $U \subset A$  est un ouvert, alors  $U$  est une pseudovariété stratifiée sans monodromie. De même, chaque link  $L_S$  est une pseudovariété stratifiée sans monodromie. Comme exemple de pseudovariété stratifiée sans monodromie nous avons celles qui ont été cités dans l'introduction de ce travail.

## 3 Calcul de $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A)$

La démonstration du Théorème de ce travail est basée sur le calcul de  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A)$  pour deux perversités  $m(A)$ -consécutives  $\bar{p} \leq \bar{q}$ . **3.1.** Soit  $\mathcal{S}$  la famille des composantes connexes de  $A_{n-m(A)}$ ,

fixons pour chaque  $S \in \mathcal{S}$  un voisinage tubulaire  $U_S$  avec  $U_S \cap U_{S'} = \emptyset$  si  $S \neq S'$ . Ecrivons  $U = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} U_S$ . Posons  $\mathcal{U}_S = \{U_\alpha\}$  un bon recouvrement de  $S$ . Définissons le complexe  $C_*(\mathcal{U}_S, IC_*^{\bar{q}/\bar{p}})$

par  $C_i(\mathcal{U}_S, IC_j^{\bar{q}/\bar{p}}) =$

$\bigoplus_{\alpha_0 < \dots < \alpha_i} IC_j^{\bar{q}/\bar{p}}(\pi_S^{-1}(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_i}))$ . Dénotons par  $\delta$  la différentielle de Čech habituelle et par  $\bar{\partial}$  la

différentielle de  $IC_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A)$ . Posons  $D = \delta + (-1)^i \bar{\partial}$ , en procédant comme dans [1, pag.197], l'étude du complexe différentiel bifiltré  $\{C_*(\mathcal{U}_S, IC_*^{\bar{q}/\bar{p}}), D\}$  donne:

**Proposition 3.2** *Il existe une suite spectrale convergente vers  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(U)$  dont le deuxième terme est  $E_{i,j}^2 = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} H_i(S) \otimes IH_j^{\bar{q}/\bar{p}}(cL_S)$ .*

**3.3.** Le calcul de l'homologie d'intersection du cône (voir [3] et [4, pag.232]) et la suite exacte longue de [4, pag.231] montrent:  $IH_j^{\bar{q}/\bar{p}}(cL_S) = IH_{j-1}^{\bar{p}}(L_S)$  si  $j = m(A) - 1 - p_{m(A)}$ , et  $IH_j^{\bar{q}/\bar{p}}(cL_S) = 0$  si  $j \neq m(A) - 1 - p_{m(A)}$ . Par conséquent,

$$IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(U) \cong \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} H_{*-(m(A)-1-p_{m(A)})}(S) \otimes IH_{m(A)-2-p_{m(A)}}^{\bar{p}}(L_S).$$

Finalement, puisque  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A) = IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(U)$  on obtient

$$IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A) \cong \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} H_{*(A)-1-p_m(A)}(S) \otimes IH_{m(A)-2-p_m(A)}^{\bar{p}}(L_S).$$

Nous en déduisons que  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A) = 0$  est équivalent à la nullité de  $IH_{m(A)-2-p_m(A)}^{\bar{p}}(L_S)$ , pour tout  $S \in \mathcal{S}$ .

## 4 Démonstration du Théorème

L'implication inverse est montrée à [4]. Pour la nécessité nous suivons un chemin parallèle à celui de [4]. Nous procédons par récurrence sur  $m(A)$ . Si  $m(A) = 0$  la pseudovariété stratifiée  $A$  est en fait une variété. Supposons le résultat vérifié pour toute pseudovariété stratifiée sans monodromie  $B$  avec  $m(B) < m(A)$ . Pour prouver que  $A$  est une variété homologique il suffira de prouver que  $U = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} U_S$  (voir §3.2) et  $A - A_{n-m}$ , où  $m = m(A)$ , sont des variétés homologiques.

- $U$  est une variété homologique. Fixons  $\bar{r} = (r_2, \dots, r_{m-1})$  une perversité et considérons pour chaque  $\beta \in \{0, \dots, m-3\}$  les perversités  $m$ -consécutives:  $\bar{p} = (r_2, \dots, r_{m-1}, \beta, 0, \dots, 0)$  et  $\bar{q} = (r_2, \dots, r_{m-1}, \beta+1, 0, \dots, 0)$ . D'après §3.3 nous avons  $IH_0^{\bar{r}}(L_S) = 0$  pour tout  $S \in \mathcal{S}$  et  $j \in \{1, \dots, m-2\}$ . La normalité des  $L_S$  implique  $IH_0^{\bar{r}}(L_S) = IH_{m-1}^{\bar{r}}(L_S) = R$ . Puisque  $m(L_S) < m$  l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que chaque  $L_S$  est une sphère homologique. Par conséquent, chaque  $U_S$  est une variété homologique et donc l'ouvert  $U$  est une variété homologique.

- $A - A_{n-m}$  est une variété homologique. La suite exacte longue associée à la paire  $(A, U)$  (cf. [4, pag.231]) et la relation  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A) = IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(U)$  montrent  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A, U) = 0$  pour tout couple  $\bar{p} < \bar{q}$  de perversités amples. Par excision nous trouvons  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A - A_{n-m}, U - A_{n-m}) = 0$ . D'autre part, la suite exacte longue associée à la paire  $(A - A_{n-m}, U - A_{n-m})$  et la relation  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(U - A_{n-m}) = 0$  (car  $U - A_{n-m}$  est une variété homologique) montrent  $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A - A_{n-m}) = 0$ . Finalement, puisque  $m(A - A_{n-m}) < m$ , nous appliquons l'hypothèse de récurrence et nous prouvons que  $A - A_{n-m}$  est une variété homologique.

## References

- [1] R. Bott et L. Tu: *Differential forms in algebraic topology* - Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [2] J.P. Brasselet: *Homologie d'intersection: définitions singulière et simpliciale* - Ecole Polytechnique, Journées singulières 84-85.
- [3] M. Goresky et R. MacPherson: *Intesection homologytheory* - Topology **19**(1980), 135-162.
- [4] H. King: *Intersection homology and homology manifolds* - Topology **21**(1982), 229-234.
- [5] P. Molino: *Feuilletages riemanniens* - Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston Basel, 1988.
- [6] M. Nagase:  *$L^2$ -cohomology and intesectionhomology of stratified spaces* - Duke Math. J. **50**(1983), 329-368.

- [7] R. Thom: *Ensembles et morphismes stratifiés* - Bull. Amer. Math. Soc. **75**(1969), 240-284.

Jean Paul Brasselet U.F.R. de Mathématiques U.R.A. D 751 au C.N.R.S. Université de Lille 59655 Villeneuve D'Ascq Cedex  
France Martin Saralegi Unidad de Matemáticas Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Serrano 12328006 Madrid  
Espagne